University of the Pacific
Scholarly Commons

Euler Archive - All Works

Euler Archive

1741

De constructione aequationum ope motus tractorii aliisque ad methodum tangentium inversam pertinentibus

Leonhard Euler

DE CONSTRVCTIONE AEQVATIONVM OPE MOTVS TRACTORII, ALIISQVE AD METHODVM TANGENTIVM INVERSAM PERTINENTIBVS.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Tab. V. Fig. 1. Motu tractorio curuae lineae deſcribuntur, dum filum datae longitudinis altero termino pondus annexum habens, altero termino in data linea ſiue recta ſiue curua protrahitur; atque ea linea curua, quam pondus motu ſuo deſcribit, tractoria vocatur. Vt ſi filum BA in A pondere onuſtum, termino B in linea data BN protrahatur, linea AM, in qua alter terminus A mouebitur, erit curua tractoria. Huius curuae iſta nota eſt proprietas, quod filum perpetuo poſitum ſit in tangente curuae tractoriae; ſcilicet quando filum eſt in ſitu NM, et hoc modo punctum M curuae tractoriae generat, erit recta MN tangens curuae in puncto M; ex qua proprietate ſolius calculi ope ex data curua BN pro tractoria AM aequatio poteſt inueniri.

§. 2. Ratio autem huius deſcriptionis ex mechanica eſt petenda, quia a motus natura pendet. Mouetur enim corpus ſemper in ea directione in qua protrahitur, ſi quidem quieſcit; atque hoc caſu directio fili, quo corpus trahitur, eſt tangens curuae a corpore de-

ſcriptae.

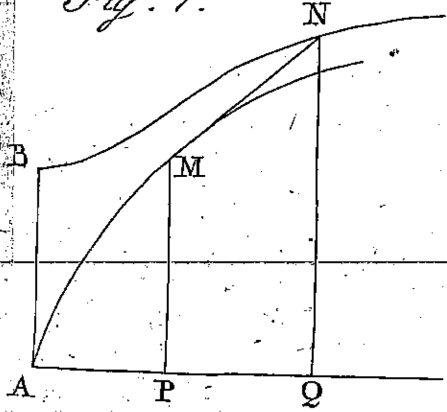

Fig. 1.

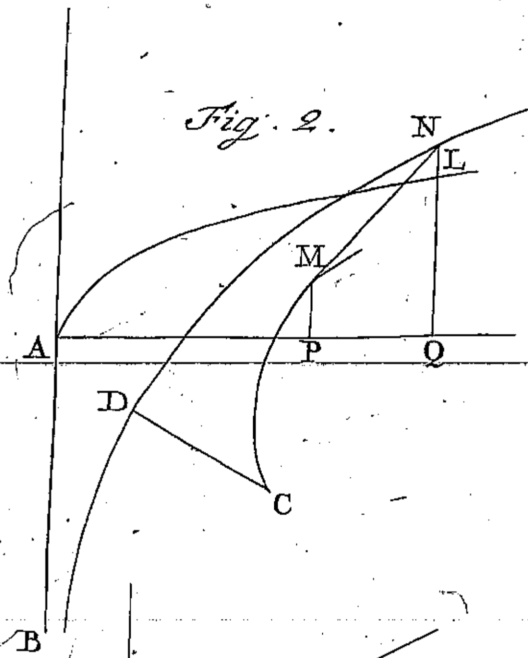

Fig. 2.

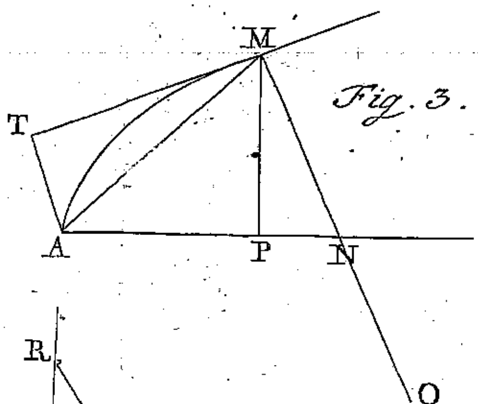

Fig. 3.

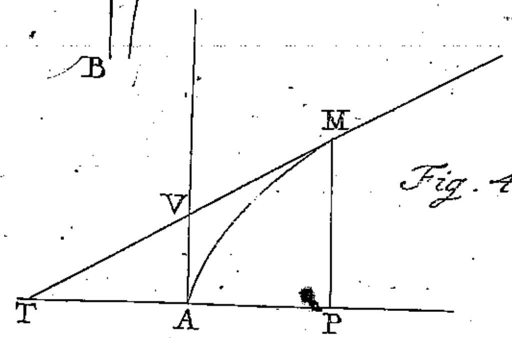

Fig. 4.

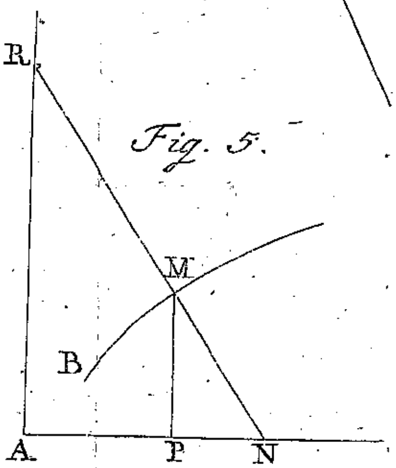

Fig. 5.

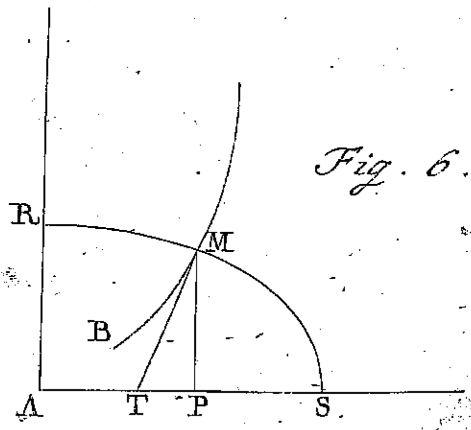

Fig. 6.

ſcriptae. At ſi corpus iam habeat motum, eius directio a directione fili diſcrepabit. Quare quo motus directio perpetuo in poſitionem fili incidat, oportet vt motus corpori iam impreſſus quouis momento pereat. Ad hoc ergo obtinendum requiritur, vt haec deſcriptio perficiatur ſuper plano horizontali et ſatis aſpero, illud quidem, ne vis grauitatis directionem immutet, hoc vero vt frictione omnis motus iam acquiſitus pereat. Praeterea filum tardiſſime protrahi debet, quo effectus frictionis ſit eo maior, et corpus nihil de priſtino motu retineat.

§. 3. Si igitur hoc modo curua tractoria AM deſcribatur, ea hanc habebit proprietatem, vt ex quouis puncto M ducta tangens MN vsque ad datam curuam BN ſit datae magnitudinis. Ex quo perfacilis oritur modus ex data curua tractoria AM inueniendi curuam BN cuius illa eſt tractoria pro data fili longitudine. At ex data curua PN innumerabiles oriri poſſunt tractoriae longitudine fili immutata, prout initio poſitio fili BA ad curuam BN fuerit inclinata. Longe autem difficilius eſt per calculum ex data curua BN inuenire tractoriam AM quam ex tractoria AM data curuam BN.

§. 4. Obſeruaui autem geometricam conſtructionem tractoriae AM ſemper pendere a reſolutione aequationis $ds + ss\,dz = Z\,dz$, denotante Z functionem quamcunque ipſius z. Quare cum haec aequatio conſtructu ſit valde difficilis, quippe multo generalior quam haec $ds + ss\,dz = z^m\,dz$, quae a *Com. Riccati* quondam erat propoſita, eius conſtructio ope tractorii motus attentionem meretur. Quae conſtructio cum ſit praeterea ad-

 modum.

modum simplex et facilis, operae pretium erit aequationis tam difficilis constructionem ad motum tractorium reduxisse.

§. 5. Pono igitur in curua data BN abscissam AQ $= t$, et applicatam QN $= u$; dabiturque u per t et constantes. Pro curua autem quaesita pono AP $= x$ et PM $= y$; sitque $dy = p\,dx$; longitudinem fili vero AB vel MN pono $= b$. His positis erit $\surd(1 + pp) : 1 =$ MN(b) : PQ$(t - x)$, et $\surd(1 + pp) : p =$ MN(b) : QN $-$ PM $(u - y)$. Hinc igitur fit $\frac{b}{\surd(1+pp)} = t - x$ et $\frac{bp}{\surd(1+pp)} = u - y$, atque ex his porro $pt - px = u - y$. Hanc postremam aequationem differentio ponendo $p\,dx$ loco dy, quo facto prodit $p\,dt + t\,dp - x\,dp = du$ atque $x = t + \frac{p\,dt}{dp} - \frac{du}{dp}$. Est vero ex prima aequatione $x = t - \frac{b}{\surd(1+pp)}$, vnde obtinetur ista aequatio $du = p\,dt + \frac{b\,dp}{\surd(1+pp)}$, in qua duae tantum insunt variabiles p et t, quia u per t datur.

§. 6. Est autem p cotangens anguli MNQ posito sinu toto $= 1$, quare haec aequatio ope motus tractorii resoluitur, per illum enim innotescet angulus MNQ, eiusque consequenter cotangens cui aequalis est p. Ad irrationalitatem autem tollendam pono $\surd(1 + pp) = p + q$ seu $q = \surd(1 + pp) - p$; quia antem $\surd(1 + pp)$ est cosecans anguli MNQ et p eius cotangens, erit per elementa trigonometrica q tangens semissis anguli MNQ. Per hanc vero substitutionem est $p = \frac{1-qq}{2q}$ et $\surd(1 + pp) = \frac{1+qq}{2q}$ atque $dp = \frac{-dq(1+qq)}{2qq}$. Hinc ergo erit $\frac{dp}{\surd(1+pp)} = \frac{-dq}{q}$, atque superior aequatio transibit in hanc $2q\,du = dt - qq\,dt - 2b\,dq$.

§. 7.

§. 7. Ad hanc aequationem vlterius reducendam, pono $du = \frac{bdr}{r}$, eritque $2bqdr + 2brdq = rdt - rqqdt$, in qua t et r a se mutuo pendent, qui t est $= AQ$, et $blr = QN$. Porro fiat $qr = s$ seu $q = \frac{s}{r}$ erit $2bds = rdt - \frac{ssdt}{r}$. Sit nunc $\frac{dt}{r} = 2bdz$ et $rdt = 2bZdz$, erit $rr = Z$ et $r = \sqrt{Z}$. Praeterea est $dt^2 = 4b^2 Zdz^2$ et $t = 2b\int dz\sqrt{Z}$. Per z igitur curua BN ita determinatur, vt sit $AQ = 2b\int dz\sqrt{Z}$ et $QN = \frac{b}{2}lZ$. Quia ergo curua BN datur, dabitur simul Z per z. Factis autem his substitutionibus habebitur $ds + ssdz = Zdz$.

§. 8. Proposita ergo aequatione $ds + ssdz = Zdz$ valor ipsius s per z sequenti modo poterit definiri. Construatur curua BN huiusmodi vt sumta abscissa $AQ = 2b\int dz\sqrt{Z}$, sit applicata $QN = \frac{b}{2}lZ$. Tum filo longitudinis b secundum curuam BN protracto describatur tractoria AM. Deinde ducatur tangens MN, quae etiam ipso filo exhibebitur, innotescetque angulus MNQ, cuius dimidii tangens sit $= q$. Hoc facto erit $s = qr = q\sqrt{Z}$.

§. 9. Coordinatae autem AP et PM curuae tractoriae ita se habebunt: erit $AP = x = t - \frac{b}{\sqrt{(1+pq)}} = t - \frac{2bq}{1+qq}$, et $y = u - \frac{bp}{\sqrt{(1+pp)}} = u - \frac{b(1-qq)}{1+qq}$. Quia autem est $t = 2b\int dz\sqrt{Z}$ et $u = \frac{b}{2}lZ$, atque $q = \frac{s}{r} = \frac{s}{\sqrt{Z}}$; erit $x = 2b\int dz\sqrt{Z} - \frac{2bs\sqrt{Z}}{ss+Z}$ et $y = \frac{b}{2}lZ + \frac{bss-bZ}{ss+Z}$. Ex his iam aliae nascuntur constructiones aequationis $ds + ssdz = Zdz$. Per motum enim tractorium innotescunt

 coor-

coordinatae x et y curuae AM, atque ex his erit vel $s = \frac{Z(t-x)}{2b\sqrt{Z}-t+x}$, vel $s = \frac{Z(b-u+y)}{b+u-y}$.

§. 10. Aequatio vero inter x et y ex data aequatione inter t et u facile inuenitur. Est enim ex aequationibus supra inuentis $t = x - \frac{b}{\sqrt{(1+pp)}} = x + \frac{bdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ et $u = y + \frac{bp}{\sqrt{(1+pp)}} = y + \frac{bdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Quare si in aequatione data inter t et u loco t et u isti valores substituantur prodibit aequatio inter x et y pro tractoria AM quaesita, quae erit differentialis primi gradus si aequatio inter t et u fuerit algebraica. Ex hac vero aequatione, quae plerumque fit maxime intricata, nihil, quod ad cognitionem curuae AM attinet, poterit concludi. Omnium autem huiusmodi aequationum resolutio pendebit a resolutione huius $ds + ssdz = Zdz$.

§. 11. Si ergo proponatur haec aequatio $ds + s^2dz = a^2z^{2n}dz$, quae est ea ipsa quam *Com. Riccati* resoluendam proposuit, erit $Z = a^2z^{2n}$ et $\int dz\sqrt{Z} = \frac{az^{n+1}}{n+1}$ atque $lZ = 2la + 2nlz$. Hinc erit $t = \frac{2abz^{n+1}}{n+1}$, et $u = bla + nblz$. Quia autem est $t = \frac{2abz^{n+1}}{n+1}$, erit $t = l\frac{2ab}{n+1} + (n+1)lz$ seu $lz = \frac{lt - l2ab + l(n+1)}{n+1}$ Quo valore in aequatione altera $u = bla + nblz$ substituto, et applicatis u pro lubitu auctis vel diminutis habebitur ista aequatio $u = \frac{nb}{n+1}lt$, seu $tdu = \frac{nbdt}{(n+1)}$; quae est aequatio inter t et u, et indicat curuam BN esse

esse logarithmicam, cuius subtangens constans est $= \frac{nb}{n+1}$.

§. 12. Pro hoc ergo casu construatur logarithmica DN ad asymtoton AB, cuius subtangens sit $= \frac{nb}{n+1}$. Producatur quaecunque applicata AE, quae pro axe habeatur, et motu tractorio filum longitudinis b altero termino in logarithmica protrahatur, describatque alter terminus tractoriam CMN. Demittantur ex punctis M et N perpendicula MP et NQ erit $s = \frac{z.PQ}{2b\sqrt{z - PQ}} = \frac{a^2 z^{2n}.PQ}{2abz^n - PQ}$ sumto $z = \sqrt[n+1]{\frac{2(n+1)AQ}{ab}}$ Vnica ergo logarithmica omnes casus aequationis $ds + ssdz = a^2 z^{2n} dz$ possunt construi, dummodo sit tangens MN seu filum ad subtangentem logarithmicae vt $n+1$ ad n. Figura 2.

§. 13. Sequente praeterea modo aequatio $ds + ssdz = a^2 z^{2n} dz$ potest construi. Super axe construatur curua paraboloides, dictis $AQ = t$ et $QL = z$, hac aequatione expressa $z^{n+1} = \frac{2(n+1)t}{ab}$. Deinde filo longitudinis b super logarithmica DN, vt ante est praeceptum describatur tractoria CM. Tum in paraboloide sumatur applicata $QL = z$, eaque producatur, donec logarithmicam secet in N. Ex N ducatur recta NM longitudinis b ad tractoriam, et ex M demittatur perpendiculum MP. Quibus factis erit $s = \frac{4(n+1)^2 AQ^2.PQ}{bb(4(n+1)AQ.QL - PQ.QL^2)}$ Vel etiam posita tangente dimidii anguli $MNQ = q$, erit $s = \frac{2(n+1)AQ.q}{b.QL}$.

§. 14.

§. 14. Cum methodus, qua in reductione aequationis constructae ad descriptionem tractoriae sum vsus, maximam habeat vtilitatem in resolutione problematum generalium, quae ad methodum tangentium inuersam referuntur, hic nonnulla huiusmodi problemata adiungam, eorumque resoluendorum modum ostendam. Cuius rei ratio quo facilius percipiatur, ante exponendum est, quam variis modis natura cuiusque curuae possit determinari, et quinam sint illi modi, ex quibus facillime diiudicari possit, an curua proposita sit algebraica, an transcendens.

§. 15. Vsu iam maxime receptum est, vt natura cuiusque curuae exprimatur aequatione inter duas coordinatas orthogonales abscissam scilicet et applicatam, quippe ex qua quaelibet curuae puncta facillime possunt inueniri. Ex huiusmodi aequatione sponte sequitur, vtrum curua sit algebraica an secus; nam si aequatio est algebraica curua quoque talis censetur; sin vero aequatio fuerit transcendens, curua quoque transcendens habetur. Eadem vero conclusio deduci potest ex aequatione inter alias rectas lineas, quae curuae naturam exprimat, si modo positio earum rectarum non ab ipsa curua pendeat, sed vel ad datum punctum vel datam lineam referatur.

§. 16. At si positio earum linearum, inter quas aequatio curuae naturam exprimit, sine curuae ipsius cognitione definiri non potest, ex ea aequatione etiam singula curuae puncta immediate inueniri non possunt. Ex huiusmodi quoque aequatione, etsi est algebraica, tamen

tamen non ſequitur curuam eſſe algebraicam, ſed ſaepe maxime erit tranſcendens. Quamobrem tum ad conſtructionem tum ad cognitionem curuae huiusmodi aequatio in aliam eſt transmutanda, quae ſit inter lineas, quarum poſitio a curua non pendeat.

§. 17. Optimum igitur ad cognoſcendam et conſtruendam curuam remedium erit, aequationem, ſi fuerit inter lineas, quarum poſitio ab ipſa curua pendeat, transmutare in aequationem conſuetam inter abſciſſam et applicatam. In hoc autem negotio ſumma cura eſt adhibenda, ne in prolixiſſimos calculos et reſolutu difficillimas aequationes incidamus. Facillima enim videtur illa transmutatio in aequationem inter abſciſſam et applicatam, ſed hoc modo plerumque in inextricabiles tricas delabimur; Id quod vnico exemplo oſtendere ſufficiet.

§. 18. Exprimatur curuae AM natura aequatione inter normalem in curuam MN et portionem axis AN; quarum MN vocetur u et AN, t; ſitque aequatio curuae naturam exprimens haec ſimplex admodum $u^2 = at$. Si nunc ponatur abſciſſa $AP = x$ et applicata $PM = y$, atque curuae elementum quod eſt $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$, erit $MN = u = \frac{y\,ds}{dx}$ et $AN = t = x + \frac{y\,dy}{dx}$. Quare ſi hi valores in aequatione ſubſtituantur, habebitur quidem haec aequatio $y^2 ds^2 = ax\,dx^2 + ay\,dx\,dy$, inter x et y, ex qua neque conſtructio curuae apparet, neque etiam an ſit algebraica an ſecus. Figura 3.

§. 19. In hoc quidem casu aequatio inuenta $y^2 ds^2 = a x dx^2 + a y dx dy$, quia differentialia duas tantum habent dimensiones, in aequationem vnius dimensionis mutari potest, prodibit enim posito $dx^2 + dy^2$ loco ds^2 et extracta radice quadrata haec aequatio $2y dy = a dx + dx \sqrt{(a^2 + 4ax - 4y^2)}$ ex qua autem non tam facile natura curuae cognoscitur. Ex quo intelligitur, si magis compositam aequationem inter t et u assumsissemus, tum nequidem ad aequationem differentialem vnius dimensionis perueniri potuisse. Interim tamen a Cel. *Bernoullio* in Act. Lips. ostensum est, quoties detur aequatio algebraica inter t et u, toties quoque aequationem inter x et y fore algebraicam.

§. 20. Hanc ob rem alia via est procedendum, si ex aequatione inter t et u aequationem inter x et y eruere velimus, atque hoc obseruaui commodissime effici posse eadem methodo, qua ante constructionem aequationis $ds + ss dz = Z dz$ ad motum tractorium reduxi. Hac enim methodo statim apparebit, quibus casibus aequatio inter t et u quaecunque proposita ad aequationem algebraicam inter x et y deducat, vel si curua fuerit transcendens quadraturam dabit simplicissimam, a qua curuae constructio pendet.

§. 21. Retineamus igitur eundem casum, sitque aequatio inter $AN = t$ et $MN = u$ quaecunque; maneant etiam $AP = x$, $PM = y$ et $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$; erit $t = x + \frac{y dy}{dx}$ et $u = \frac{y ds}{dx}$. Ponatur $dy = p dx$; erit $t = x + py$ et $u = y\sqrt{(1 + pp)}$ seu $y = \frac{u}{\sqrt{(1+pp)}}$. Differenferentietur haec aequatio, habebitur $dy = p\,dx = \frac{du}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{up\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$, illa aequatio autem differentiata dat $dt = dx + pp\,dx + y\,dp$ posito $p\,dx$ loco dy, ex qua obtinetur $dx = \frac{dt}{1+pp} - \frac{y\,dp}{1+pp}$; quae per p multiplicata locoque y eius valore substituto dat $p\,dx = \frac{p\,dt}{1+pp} - \frac{pu\,dp}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}$; qua cum illa coniuncta prodit $\frac{p\,dt}{\sqrt{(1+pp)}} = du$.

§. 22. Ex hac aequatione inuenta statim obtinetur $p = \frac{du}{\sqrt{(dt^2 - du^2)}}$ et $\sqrt{(1+pp)} = \frac{dt}{\sqrt{(dt^2 - du^2)}}$. Ex quibus erit $y = \frac{u\sqrt{(dt^2 - du^2)}}{dt}$ atque $x = t - py = t - \frac{u\,du}{dt}$. Quamobrem si aequatio inter t et u fuerit algebraica, aequatio inter x et y quoque erit algebraica, ex eaque constructio curuae quaesitae facile fluit. Atque a qua quadratura pendet aequatio inter t et u ab eadem quadratura pendebit aequatio inter x et y, et consequenter quoque constructio ipsius curuae.

§. 23. In casu speciali quem ante considerabamus erat $u^2 = at$, ideoque $t = \frac{u^2}{a}$ et $dt = \frac{2u\,du}{a}$ atque $\sqrt{(dt^2 - du^2)} = \frac{du}{a}\sqrt{(4u^2 - a^2)}$. His igitur substitutis proueniet $y = \frac{1}{2}\sqrt{(4u^2 - a^2)}$ atque $x = \frac{u^2}{a} - \frac{a}{2}$. Haec autem dat $4u^2 = ax + 2a^2$; qui ipsius $4u^2$ valor in illa aequatione substitutus dat hanc inter x et y aequationem algebraicam $2y = \sqrt{(4ax + aa)}$ hoc est $y^2 = ax + \frac{a^2}{4}$, quae est aequatio pro parabola abscissis in axe ex foco sumtis.

§. 24.

Figura 4. §. 24. Si curuae AM tangens MT ad axem PA vsque producatur, atque ex A ad axem perpendicularis AV erigatur, detur aequatio inter TA et AV, qua curuae natura exprimitur; oporteatque inuenire aequationem inter abscissam AP et applicatam PM, seu construere curuam, quae omnes rectas per puncta T et V ductas tangat. Positis $AT = t$, $AV = u$, et $AP = x$, $PM = y$; erit $AT = \frac{y\,dx}{dy} - x = t$ et $AV = u = y - \frac{x\,dy}{dx}$; dataque ponitur relatio inter t et u; quae sit quaecunque.

§. 25. Sit nunc $dy = p\,dx$ erit $t = \frac{y}{p} - x$ et $u = y - px$. Haec vero posterior aequatio differentiata posito $p\,dx$ loco dy dat $du = -x\,dp$ et $x = \frac{-du}{dp}$. Hi valores vero in priore aequatione loco x et y substituti dant $t = \frac{u}{p}$ seu $p = \frac{u}{t}$. Erit ergo $dp = \frac{t\,du - u\,dt}{tt}$ ideoque $x = \frac{tt\,du}{u\,dt - t\,du}$ et $y = u + \frac{tt\,du}{u\,dt - t\,du}$. Vnde iterum patet quoties aequatio inter t et u fuerit algebraica, toties curuam AM quoque fore algebraicam, propter aequationem inter x et y algebraicam.

§. 26. Manente aequatione inter AT, t et AV, u quacunque, si loco rectarum super axe AT verticibus T infinitae parabolae TVM describantur per puncta V transeuntes, inuenienda proponitur curua AM, quae ab his parabolis omnibus tangatur. Positis $AP = x$ et $PM = y$ et $dy = p\,dx$, erit ex natura parabolae TVM, $t : u^2 = t + x : y^2$; vnde habetur $y^2 = u^2 + \frac{u^2 x}{t}$. Quia porro parabola TVM tangere debet curuam AM, communem habebunt tangentem in puncto M atque ideoquoque sub-

subtangentem communem. Eſt vero ſubtangens parabolae in M $= 2PT = 2t + 2x$, quae aequalis eſſe debebit $\frac{y\,dx}{dx} = \frac{y}{p}$ ſubtangenti curuae quaeſitae AM, vnde oritur $y = 2pt + 2px$.

§. 27. Harum duarum aequationum ſi prior per poſteriorem diuidatur, prodit $y = \frac{u^2}{2pt}$, quo valore in altera aequatione ſubſtituto prodit $x = \frac{u^2}{4p^2t} - t$. Differentietur nunc vtraque aequatio; erit $dy = p\,dx = \frac{u\,du}{pt} - \frac{u^2dt}{2ptt} - \frac{u^2dp}{2p^2t}$ et $dx = \frac{u\,du}{2p^2t} - \frac{u^2dt}{4p^2tt} - \frac{u^2dp}{2p^2t} - dt$. Ex quibus aequationibus dx eliminato prodit $\frac{u\,du}{2pt} + p\,dt = \frac{u^2dt}{4p^2t}$ ſeu $pp = \frac{u^2}{4tt} - \frac{u\,du}{2t\,dt}$. Hinc ergo erit $x = \frac{2tt\,du}{u\,dt - 2t\,du}$ et $y = \frac{u^2\sqrt{dt}}{\sqrt{(u^2dt - 2tu\,du)}}$. Ex quo perſpicitur curuam AM toties eſſe algebraicam, quoties aequatio inter t et u talis fuerit.

§. 28. Duo haec poſteriora problemata alio quidem modo facilius reſolui poſſunt, quaerendo punctum quo duae curuae proximae concurrunt, in eo enim erit contactus curuae quaeſitae AM. Semper autem punctum concurſus M algebraice poteſt determinari, ſi tam curuae TVM, quam aequatio inter t et u algebraicae fuerint. Ideo autem haec problemata hic adieci, quo appareat, quomodo ad aequationem algebraicam inter x et y per plures differentiales aequationes perueniri queat.

§. 29. Si infinitae rectae RN intra angulum rectum A quomodocunque fuerint diſpoſitae, ita vt earum poſitio exprimatur aequatione quacunque inter AN, t et AR, u; inuenienda proponatur curua BM, quae omnes

 has

has rectas ad angulos rectos traiiciat. Positis $AP = x$, $PM = y$ et $dy = p\,dx$ erit $PN = \frac{y\,dy}{dx} = py$, quia RN in curuam est normalis; ideoque $t = x + py$; deinde est $dy : dx = p : 1 = t : u$, vnde erit $t = pu$ seu $p = \frac{t}{u}$, et $dy = \frac{t\,dx}{u}$. Per illam vero aequationem est $y = u - \frac{ux}{t}$; quare differentiando $dy = \frac{t\,dx}{u} = du - \frac{u\,dx}{t} - \frac{x\,du}{t} + \frac{ux\,dt}{tt}$, in qua aequatione duae insunt variabiles x et t, quia u per t datur.

§. 30. Aequatio postrema reducta in hanc abit $dx + x\left(\frac{t\,dt + u\,du}{tt + uu} - \frac{dt}{t}\right) = \frac{tu\,du}{tt + uu}$, quae per $\frac{\sqrt{(tt + uu)}}{t}$ multiplicata fit integrabilis; erit autem integrale $x = \frac{t}{\sqrt{(tt + uu)}} \int \frac{u\,du}{\sqrt{(tt + uu)}}$; quo cognito habebitur simul $y = u - \frac{u}{\sqrt{(tt + uu)}} \int \frac{u\,du}{\sqrt{(tt + uu)}}$. Quoties ergo $\frac{u\,du}{\sqrt{(tt + uu)}}$ integrationem admittit, toties curua BM erit algebraica. Ceterum autem constructio pendet a quadratura $\int \frac{u\,du}{\sqrt{(tt + uu)}}$.

§. 31. Consideremus huius problematis casum, quo RN perpetuo eiusdem magnitudinis manet; seu quo $\sqrt{(tt + uu)} = a$, vel $u = \sqrt{(u^2 - t^2)}$. Erit ergo $\int \frac{u\,du}{\sqrt{(tt + uu)}} = \frac{-tt}{2a}$; vbi constantem non adiicio, ne ad maxime compositas aequationes deducar. Hoc inuento erit $x = \frac{-t^3}{2a^2}$ atque $t = -\sqrt[3]{2a^2x}$, et propterea $u = (a^2 - \sqrt[3]{4a^4x^2})$

Quia vero est $y = \frac{u(t - x)}{t}$ erit $x = \frac{\pm(x + \sqrt[3]{2a^2x})\sqrt{(a^2 - \sqrt[3]{4a^4x^2})}}{\sqrt[3]{2a^2x}}$ quae sumendis quadratis transit in hanc $\frac{3ax^2}{\sqrt[3]{4ax^2}} = a^2 - x^2 - y^2$, haec sumendis cubis in sequentem:

$(a^2 - x^2$

$(a^2-x^2-y^2)^3=\frac{27}{4}a^2x^4$, quae eſt pro linea ſexti ordinis.

§. 32. Dantur autem praeter hanc curuam infinitae aliae quaeſtioni aeque ſatisfacientes, quae inuenientur, ſi ad integrale ipſius $\frac{u\,du}{\sqrt{(tt+uu)}}$ quantitas quaecunque conſtans addatur. Maxime autem aequatio inter x et y erit compoſita, propterea quod ex aequationibus indeterminata t eliminari debet, quae ad quatuor dimenſiones aſcendit. Interim tamen conſtructio erit facilis.

§. 33. Simili modo problema ſolui poteſt, ſi loco rectarum puncta R et N iungentium, curuae quaecunque per haec puncta ducantur, quae a quaeſita ad angulos rectos ſecari debeant. Ad hoc oſtendendum data ſit quaecunque aequatio inter $AS=t$ et $AR=u$, ductaque ſit quarta ellypſeos pars SMR per puncta R et S, cuius igitur centrum erit in A et ſemiaxes coniugati AS ac AR. Infinitas vero has ellipſes ad angulos rectos traiiciat curua BM, quae quaeritur. Ponantur $AP=x$ et $PM=y$ atque $dy=p\,dx$, erit ex natura ellipſis $y=\frac{u}{t}\sqrt{(tt-xx)}$, ſeu $y^2=u^2-\frac{u^2x^2}{t^2}$. Figura 6.

§. 34. Ad ellipſin in puncto M ducatur normalis MT; erit haec per conditionem problematis ſimul tangens curuae quaeſitae BN. Quatenus autem MT eſt tangens curuae BM erit $PT=\frac{u^2x}{t^2}$. At quatenus MT eſt tangens curuae BM erit $PT=\frac{y\,dx}{dy}=\frac{y}{p}$. Quocirca habebitur iſta aequatio $y=\frac{pu^2x}{t^2}$; cuius differentialis eſt $dy=p\,dx=\frac{pu^2dx}{t^2}+\frac{2puxdu}{tt}+\frac{u^2xdp}{dt}-\frac{2pu^2xdt}{t^3}$, ex qua

fit

fit $p\,dx = \frac{2ptux\,du + tu^2 x\,dp - 2pu^2 x\,dt}{t(t_2 - u^2)}$. Prior vero aequatio differentiata dat $y\,dy = \frac{p^2 u^2 x\,dx}{tt} = u\,du - \frac{u^2 x\,dx}{t^2} - \frac{ux^2\,du}{tt} + \frac{u^2 x^2\,dt}{t^3}$ seu $ux\,dx = \frac{t^3\,du - tx^2\,du + ux^2\,dt}{t(pp+1)}$.

§. 35. Si ex duabus aequationibus differentialibus dx eliminetur, habebitur $u^2 x^2 = \frac{p(tt-uu)(t^3\,du - tx^2\,du + ux^2\,dt)}{(pp+1)(2pt\,du + tu\,dp - 2pu\,dt)}$. Integrales vero aequationes coniunctae y eliminata dant $x^2 = \frac{t^4}{tt+ppuu}$. Hic ipsius x^2 valor si in illa aequatione substituatur, proueniet $tu(pp+1)(2pt\,du + tu\,dp - 2pu\,dt) = p(tt-uu)(p^2 u\,du - t\,dt)$. Ponatur $p = \frac{qtt}{uu}$ orietur ista aequatio $\frac{tu\,dq}{q} = \frac{(tt-uu)(q^2 t^3\,du + u^3\,dt)}{q^2 t^4 + u^4}$ a cuius aequationis constructione vel separatione ipsius q ab u et t, pendet constructio curuae quaesitae.

§. 36. Habeat exempli causa AR ad AS rationem datam, seu sint omnes ellipses inter se similes erit $u = nt$; atque generalis aequatio abibit in hanc $\frac{dq}{q} = \frac{(1-nn)(q^2\,dt + n^2\,dt)}{q^2 t + n^4 t}$, in qua variabiles t et q separari possunt, prodibit namque $\frac{(1-nn)\,dt}{t} = \frac{(q^2+n^4)\,dq}{q(q^2+n^2)} = \frac{n^2\,dq}{q} + \frac{(1-n^2)\,q\,dq}{q^2+n^2}$, quae integrata dat $\left(\frac{t}{\sqrt{(q^2+n^2)}}\right)^{1-nn} = Cq^{n^2}$ seu $t = aq^{\frac{n^2}{1-n^2}}\sqrt{(q^2+n^2)}$. Fiet ergo $u = naq^{\frac{n^2}{1-n^2}}\sqrt{(q^2+n^2)}$ et $x = naq^{\frac{n^2}{1-n^2}}$ et $y = qx$. Inter x et y ergo elicitur ista aequatio $x = b^{1-n^2} y^{n^2}$ pro curuis parabolicis; quod congruit cum iis, quae de traiectoriis orthogonalibus iam pridem sunt detecta.

§. 37. Quando in astronomia physica ex data vi centripeta curua determinatur, quam corpus proiectum descrifcribit; peruenitur ftatim ad aequationem inter diftantiam corporis a centro virium et perpendiculum ex centro in tangentem curuae demiffum. Difficulter autem ex tali aequatione cognofci poteft, vtrum curua defcripta fit algebraica an tranfcendens; difficilius vero eft aequationem inter coordinatas orthogonales fimpliciffimam inuenire. Methodo vero noftra hactenus vfitata haec quaeftio facile expeditur.

§. 38. Sit centrum virium A et curua a corpore proiecto defcripta BM; ponatur diftantia $AM = t$ et in tangentem MT ex A demiffum perpendiculum $AT = u$, fitque curuae natura aequatione inter t et u expreffa. Figura 3. In axe per A prolibitu ducto fit abfciffa $AP = x$, applicata $PM = y$, et $dy = p\,dx$; erit $t = \surd(x^2 + y^2)$ et $u = \frac{y - px}{\surd(1+pp)}$. Haec pofterior aequatio vero differentiata dat $du\surd(1+pp) + \frac{up\,dp}{\surd(1+pp)} = -x\,dp$, vnde erit $x = \frac{-du\surd(1+pp)}{dp} - \frac{pu}{\surd(1+pp)}$ et $y = \frac{-p\,du\surd(1+pp)}{dp} + \frac{u}{\surd(1+pp)}$.

§. 39. Subftituantur hi ipforum x et y valores in aequatione $tt = x^2 + y^2$, quo facto habebitur $tt = u^2 + \frac{du^2(1+pp)^2}{dp^2}$, vnde oritur $\frac{dp}{1+pp} + \frac{du}{\surd(tt-uu)} = 0$. Denotet $\int \frac{du}{\surd(tt-uu)}$ arcum cuius tangens eft q exiftente finu toto $= 1$; erit $A\,p + A\,q = A\,b$ denotante A arcum cuius tangens eft quantitas adiuncta. Quocirca erit $p = \frac{b-q}{1+bq}$, et $\surd(1+pp) = \frac{\surd(1+bb)(1+qq)}{1+bq}$. Cum autem fit $\frac{du}{dp} = \frac{-\surd(tt-uu)}{1+pp} = \frac{-(1+bq)^2\surd(tt-uu)}{(1+bb)(1+qq)}$ erit $x = \frac{(1+bq)\surd(tt-uu) - (b-q)u}{\surd(1+bb)(1+qq)}$ atque $y = \frac{(b-q)\surd(tt-uu) + (1+bq)u}{\surd(1+bb)(1+qq)}$.

 §. 40.

§. 40. Quoties ergo aequatio inter t et u eſt algebraica ſimulque ita comparata, vt $\int \frac{du}{\sqrt{(tt-uu)}}$ denotet arcum circuli, cuius tangens algebraice poteſt exhiberi; toties curua a corpore deſcripta erit algebraica, eiusque aequatio inter coordinatas orthogonales algebraica per inuentas formulas inuenitur.

§. 41. Si detur relatio inter radium oſculi MO et partem eius MN ſeu normalem aequatione quacunque, aequatio inter coordinatas AP, PM hac ratione poterit inueniri, ex qua ſtatim appareat quibus caſibus curua fiat algebraica. Sit nempe $MN = t$ et $MO = u$ dataque ſit aequatio quaecunque inter t et u; Ponatur $AP = x$, $PM = y$ atque $dy = p\,dx$. Erit ergo elementum curuae $= dx\sqrt{(1+p^2)}$ et $ddy = dp\,dx$ poſito dx conſtante. Ex his igitur erit $MN = t = y\sqrt{(1+pp)}$ et

$MO = u = \frac{-dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$. Ex quarum aequationum poſteriore fit $dx = \frac{-u\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$; prior differentiata dat $dy = p\,dx = \frac{dt + pp\,dt - pt\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$. His ergo aequationibus coniunctis habebitur $pu\,dp = pt\,dp - dt - pp\,dt$.

§. 42. Aequatio haec inuenta, quia u per t dari ponitur, admittit variabilium ſeparationem, abit enim in hanc $\frac{p\,dp}{1+pp} = \frac{dt}{t-u}$, cuius integralis eſt $l\sqrt{(1+pp)} = \int \frac{dt}{t-u}$. Sit $\int \frac{dt}{t-u} = lq$ erit $\sqrt{(1+pp)} = q$ et $y = \frac{t}{q}$. Hinc ergo porro eſt $dy = \frac{q\,dt - t\,dq}{qq} = p\,dx = dx\sqrt{(qq-1)}$;

ideoque

ideoque $x = \int \frac{q\,dt - t\,dq}{qq\sqrt{(qq-1)}}$. Ex quo perſpicitur, vt curua AM fiat algebraica, duo requiri, primo ſcilicet vt $\int \frac{dt}{t-u}$ logarithmis poſſit exhiberi, atque tum, vt $\frac{q\,dt - t\,dq}{qq\sqrt{(qq-1)}}$ integrationem admittat.

§. 43. Sit MO multiplum ipſius MN ſeu $u = mt$, erit $q = a^{m-1} t^{1-m}$ atque $y = \frac{t^m}{a^{m-1}}$. Erit autem porro

$$dy = \frac{mt^{m-1}\,dt}{a^{m-1}} = p\,dx = dx\sqrt{(a^{2m-2} t^{2-2m} - 1)},$$ vnde fit

$$dx = \frac{mt^{2m-2}\,dt}{a^{m-1}\sqrt{(a^{2m-2} - t^{2m-2})}}$$ atque $$x = \int \frac{mt^{2m-2}\,dt}{a^{m-1}\sqrt{(a^{2m-2} - t^{2m-2})}}$$

Ex quo perſpicitur curuam fore algebraicam ſi haec formula fuerit integrabilis; hoc autem euenit, quoties vel $\frac{m}{m-1}$ fuerit numerus impar affirmatiuus ſeu $m = \frac{2i+1}{2i}$, vel $\frac{m}{1-m}$ numerus par affirmatiuus ſeu $m = \frac{2i+1}{2i+2}$ denotante i numerum integrum affirmatiuum. Caſus autem quo $m = 1$ dat $t = u$ atque $dt = 0$ ſeu $t = u =$ conſtanti, ex quo cognoſcitur curuam eſſe circulum.

§. 44. Data ſit nunc aequatio quaecunque inter arcum AM et radium oſculi MO, ex qua determinari debeat aequatio inter coordinatas AP et PM. Quod antequam quomodo inueniendum ſit oſtendam, obſeruari conuenit hanc curuas exprimendi rationem per aequationem inter arcum et radium oſculi maxime ad curuas cognoſcendas eſſe accommodatam. Aequatio enim inter coordinatas orthogonales, vel inter radium et perpendiculum in tangentem tam varias et diuerſas formas ſumendis aliis axibus aliisque abſciſſarum initiis induere poteſt, vt, ad quamnam curuam pertineat, quamuis curua ſit notiſſima, ſaepe difficulter perſpici poſſit. Aequatio vero quae inter curuam et radium oſculi exhibetur pro diuerſis tantum punctis, in quibus curuae initium ponitur, variari poteſt, quae tamen varietas facillime cognoſcitur. Si igitur conſuetum eſſet naturam curuarum per huiusmodi aequationes indicare, difficultas commemorata quidem tolleretur, at vtrum curua eſſet algebraica an tranſcendens non tam facile appareret. Huic vero incommodo ſequenti modo occurreretur.

§. 45. Sit arcus $AM = s$ et radius oſculi $MO = r$ dataque ſit aequatio quaecunque inter s et r. Ponantur $AP = x$, $PM = y$ ſitque $dy = p\,dx$; hisque poſitis erit $ds = dx\sqrt{(pp+1)}$ et $r = \frac{-dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$. Ex illa vero aequatione eſt $dx = \frac{ds}{\sqrt{(pp+1)}}$, ex hac autem $dx = \frac{-r\,dp}{(pp+1)^{\frac{3}{2}}}$. Quamobrem proueniet haec aequatio $ds(pp+1) = -r\,dp$ ſeu $\frac{-ds}{r} = \frac{dp}{1+pp}$. Denotet $\int\frac{ds}{r}$ arcum circuli cuius tangens ſit q poſito radio 1; eritque $At.b - At.q = At.p$; vnde fit $p = \frac{b-q}{1+bq}$ et $\sqrt{(pp+1)} = \frac{\sqrt{(1+bb)(1+qq)}}{1+bq}$. Ex his oritur $dx = \frac{(1+bq)ds}{\sqrt{(1+bb)(1+qq)}}$ et $dy = \frac{(b-q)ds}{\sqrt{(1+bb)(1+qq)}}$. Vnde intelligitur ſi primo $\int\frac{ds}{r}$ denotet arcum circuli cuius tangens algebraice per q poſſit exhiberi; atque deinde tam $\frac{ds}{\sqrt{(1+qq)}}$ quam $\frac{q\,ds}{\sqrt{(1+qq)}}$ integrationem admittat fore curuam algebraicam.

§. 46.

§. 46. Sin autem $\frac{ds}{r}$ absolute potest integrari, fieri quoque potest vt curua sit algebraica: vt sit $\int \frac{ds}{r} = v$, erit $A t. p = b - v$ et $p = t. A(b-v)$. Ex his fit $x = \int ds \cos. A(b-v)$ et $y = \int ds \sin. A(b-v)$. Quoties ergo haec integralia ita possint exhiberi vt nonnisi $\sin. A(b-v)$ et $\operatorname{cosin}. A(b-v)$ contineant, toties ob $1 = \square \sin. A(b-v) + \square \cos. A(b-v)$ aequatio algebraica inter x et y obtinetur. Vt si fuerit $r = a$ erit $x = a \sin. A(b-v)$ et $y = a \cos. A(b-v)$ ideoque $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ seu $y^2 = a^2 - x^2$, aequatio pro circulo cuius radius est $= a$.